

# RÉFÉRENTIELS NON GALILÉENS

## Sommaire

---

<b>I</b>	<b>Le changement de référentiel : lois cinématiques - "outillage" fondamental</b>	<b>3</b>
I.1	Mouvements d'un référentiel par rapport à un autre	3
	a - Position du problème	3
	b - Préliminaire : dérivation temporelle d'un vecteur - vecteur vitesse de rotation d'un référentiel par rapport à un autre $\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$	4
	c - Référentiel en translation par rapport à un autre	6
	d - Référentiel en rotation uniforme par rapport à un autre : sens physique de $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$	7
I.2	Les lois de composition cinématiques	8
	a - Loi de composition des vitesses - point coïncident	8
	b - Loi de composition des accélérations	9
	c - Loi de composition des vitesses de rotation	10
	d - Référentiel galiléen - lois de composition galiléenne déduite de la définition	11
	e - Véritable caractère du temps : une quatrième coordonnée!!!	13
<b>II</b>	<b>Le changement de référentiel : lois dynamiques et énergétiques des référentiels non galiléens</b>	<b>15</b>
II.1	Rappel fondamental : les 3 postulats de Newton (MPSI)	16
II.2	Les lois de la dynamique en référentiel non galiléen	16
	a - Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen : pseudo-forces	16
	b - Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen	18
	c - Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen	18

II.3	RFD dans les mouvements simples de référentiels . . . . .	19
a	Référentiel entraîné en translation par rapport à un autre référentiel réputé galiléen . . . . .	19
b	Référentiel entraîné en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel réputé galiléen : force "centrifuge" et force de Coriolis . . . . .	20
<b>III</b>	<b>Référentiels utiles et leur propriétés . . . . .</b>	<b>20</b>
III.1	Le référentiel de Copernic . . . . .	21
III.2	Le référentiel géocentrique . . . . .	21
a	Définition et RFD . . . . .	21
b	Caractère galiléen approché de ce référentiel - approche succincte des marées . . . . .	22
III.3	Le référentiel terrestre . . . . .	25
a	Définition et RFD . . . . .	25
b	Force centrifuge et "pesanteur vulgaire" en détail . . . . .	26
c	Force de Coriolis et déviation vers l'est en détail (et ordres de gran- deur!) . . . . .	27
d	Caractère galiléen approché de ce référentiel . . . . .	29
<b>IV</b>	<b>Quelques applications simples . . . . .</b>	<b>30</b>
IV.1	Cas de la translation accélérée . . . . .	30
IV.2	Cas de la rotation . . . . .	32

---

# I Le changement de référentiel : lois cinématiques - "outillage" fondamental

## I.1 Mouvements d'un référentiel par rapport à un autre

### a - Position du problème

Dans de très nombreux problèmes de physique, on peut être amené à décrire le mouvement d'un mobile dans deux référentiels différents :

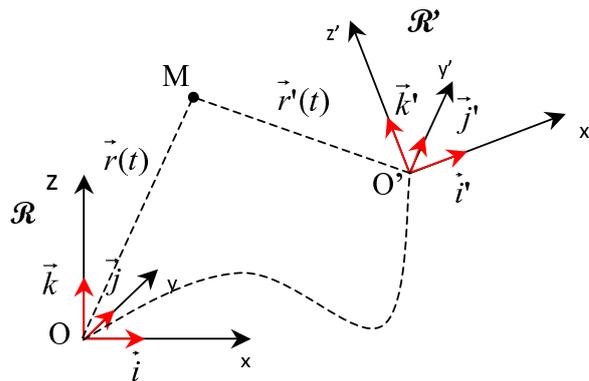


FIGURE I.1 – Deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  pour décrire le mouvement d'un seul et même mobile

⇒ On observe alors une trajectoire très différente du mobile suivant que l'on se trouve dans l'un ou l'autre des deux référentiels.

#### EXEMPLES CLASSIQUES :

- ▶ Passager en mouvement dans un train observé par un autre passager immobile dans le référentiel du train ou bien par un observateur immobile à l'extérieur du train dans le référentiel du quai.
- ▶ Pomme lâchée par le passager immobile du train ; hors frottement contre l'air, la pomme décrit une trajectoire rectiligne uniforme par rapport au passager du train ou bien parabolique par rapport à l'observateur immobile sur le quai.
- ▶ Mouvement très complexe de la pomme dans le référentiel de l'observateur sur la quai si ce dernier marche en étant ivre!!!

#### OBJECTIFS DE CE PARAGRAPHE :

- ◇ Dégager les paramètres pertinents pour décrire le mouvement d'un référentiel par rapport à un autre.
- ◇ Etablir la relation de passage d'un référentiel à l'autre pour la vitesse d'un mobile.
- ◇ Etablir la relation de passage d'un référentiel à l'autre pour l'accélération d'un mobile

**b - Préliminaire : dérivation temporelle d'un vecteur - vecteur vitesse de rotation d'un référentiel par rapport à un autre  $\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$**

Considérons deux référentiels  $\mathcal{R}_O$  et  $\mathcal{R}'_{O'}$  de bases respectives  $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$  et  $[\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}']$ .

Soit  $\vec{U}$ , un vecteur quelconque de coordonnées  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  dans  $\mathcal{R}'$  :

$$\vec{U} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}'}_{\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} : \text{dérivée de } U \text{ dans } \mathcal{R}'}} + \underbrace{x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}}_{\text{caractéristique du mvt de } \mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

Les dérivées des vecteurs  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ , et  $\vec{k}'$  sont un peu plus délicates à appréhender. Posons :

$$\begin{cases} \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = a_{11}\vec{i}' + a_{12}\vec{j}' + a_{13}\vec{k}' \\ \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = a_{21}\vec{i}' + a_{22}\vec{j}' + a_{23}\vec{k}' \\ \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = a_{31}\vec{i}' + a_{32}\vec{j}' + a_{33}\vec{k}' \end{cases}$$

► CONDITION SUR LA NORME :  $\vec{i}'^2 = 1 \xrightarrow{\text{par dériv.}} 2\vec{i}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} = 0 \implies a_{11} = 0$

On trouve de même avec  $\vec{j}'$  et  $\vec{k}' \implies a_{22} = a_{33} = 0$

► CONDITION D'ORTHOGONALITÉ DE LA BASE :

$$\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0 \implies \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' + \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{i}' = 0 \implies a_{12} + a_{21} = 0 \implies a_{12} = -a_{21} = r$$

$$\text{On trouve de même avec les autres produits scalaires : } \begin{cases} a_{23} + a_{32} = 0 \implies a_{23} = -a_{32} = p \\ a_{31} + a_{13} = 0 \implies a_{31} = -a_{13} = q \end{cases}$$

Ainsi, les dérivées des vecteurs de base de  $\mathcal{R}'$  s'expriment en fonction de seulement 3 paramètres  $p, q, r$  :

$$\begin{cases} \left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = +r\vec{j}' - q\vec{k}' = r\vec{k}' \wedge \vec{i}' + q\vec{j}' \wedge \vec{i}' \stackrel{\text{astuce!!!}}{=} (r\vec{k}' + q\vec{j}' + p\vec{i}') \wedge \vec{i}' = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{i}' \\ \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -r\vec{i}' + p\vec{k}' = r\vec{k}' \wedge \vec{j}' + p\vec{i}' \wedge \vec{j}' = (r\vec{k}' + q\vec{j}' + p\vec{i}') \wedge \vec{j}' = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{j}' \\ \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = q\vec{i}' - p\vec{j}' = r\vec{j}' \wedge \vec{k}' + p\vec{i}' \wedge \vec{k}' = (r\vec{k}' + q\vec{j}' + p\vec{i}') \wedge \vec{k}' = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

en posant le vecteur :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = p\vec{i}' + q\vec{j}' + r\vec{k}'$$

appelée **vecteur vitesse de rotation** du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ .

On dégage ainsi :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + x' \left( \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{i}' \right) + y' \left( \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{j}' \right) + z' \left( \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{k}' \right)$$

et finalement la relation générale de dérivation d'un vecteur par rapport au temps appelée formule de Bour :

PROPRIÉTÉ - (I.1) - 1:

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{U} \quad (\text{I.1})$$

**NB :** il est délicat d'appréhender dans le cas général la signification physique du vecteur vitesse de rotation. Aussi, on se concentrera par la suite sur le cas de la rotation autour d'un axe fixe où sa signification apparaîtra bien plus évidente!!!

REMARQUE - (I.1) - 1:

- Si  $\vec{U}$  est fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  alors la relation précédente devient simplement :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{U}$$

C'est par exemple le cas pour les vecteurs de base  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$  ou  $\vec{k}'$

- Cette relation appliquée à  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$  conduit à :

$$\left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$$

c - Référentiel en translation par rapport à un autre

**DÉFINITION - (I.1) - 1:**

Dans un mouvement de translation de  $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  par rapport à  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , les directions sont conservées lors du passage de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$ .

CONSÉQUENCE IMMÉDIATE : en choisissant la coïncidence des vecteurs de base de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  à  $t = 0$  :

$$\vec{i}'(t=0) = \vec{i}(t=0) \quad \vec{j}'(t=0) = \vec{j}(t=0) \quad \vec{k}'(t=0) = \vec{k}(t=0)$$

on a ensuite :

$$\vec{i}'(\forall t) = \vec{i}(\forall t) \quad \vec{j}'(\forall t) = \vec{j}(\forall t) \quad \vec{k}'(\forall t) = \vec{k}(\forall t)$$

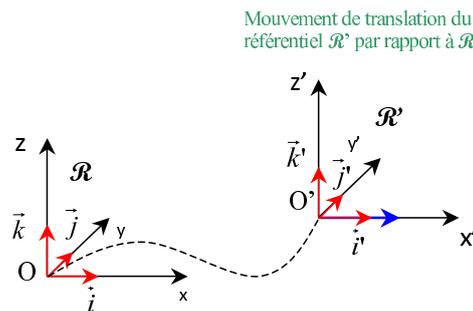


FIGURE I.2 – Mouvement de translation du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$

Dans le cas où  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$ , tous les vecteurs de  $\mathcal{R}'$  gardent une direction fixe dans  $\mathcal{R}$  en particulier les vecteurs de base donc :

$$\left. \frac{d\vec{i}'}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{j}'}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{k}'}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

ce qui implique  $p = q = r = 0$  et donc :

A RETENIR :

$$\mathcal{R}' \text{ en translation par rapport à } \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

REMARQUE - (I.1) - 2:

Dans le cas de la translation :

- la formule de dérivation d'un vecteur devient simplement :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}'} = \frac{d\vec{U}}{dt}$$

- la translation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$  ne préjuge en rien du mouvement du point  $O'$  origine de la base de  $\mathcal{R}'$

d - Référentiel en rotation uniforme par rapport à un autre : sens physique de  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$

**Hypothèse :** on envisage le cas (non restrictif!!) de la rotation de  $\mathcal{R}'$  autour de l'axe  $[Oz] = [Oz']$  fixe de  $\mathcal{R}$  à vitesse angulaire constante  $\omega = \dot{\theta}$  :

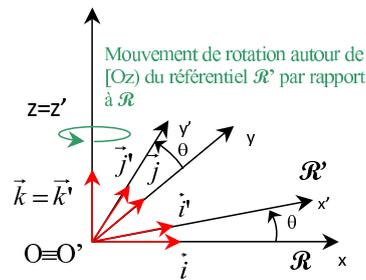


FIGURE I.3 – Mouvement de rotation autour de l'axe  $[Oz]$  du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$

Cette fois, on a :  $\begin{cases} \vec{i}^j \neq \text{cste} \text{ et } \vec{j}^j \neq \text{cste} \text{ dans le référentiel } \mathcal{R} \\ O' \equiv O \end{cases}$

$$\vec{i}^j = \cos\theta \vec{i} + \sin\theta \vec{j} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{i}^j}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} [-\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j}] = \omega \vec{j}^j$$

$$\vec{j}^j = -\sin\theta \vec{i} + \cos\theta \vec{j} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{j}^j}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta} [-\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{j}] = -\omega \vec{i}^j$$

En comparant avec les expressions de ces deux dérivées établies en **b.** on identifie  $\begin{cases} r = \omega = \dot{\theta} \\ p = q = 0 \end{cases}$   
soit finalement :

$$\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega \cdot \vec{k}$$

**NB** : ce résultat est généralisable à n'importe quel axe !!!

A RETENIR :

$\mathcal{R}'$  en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire  $\omega$   
 $\Leftrightarrow$   
 le vecteur rotation est porté par cet axe et sa norme est  $\omega$

## I.2 Les lois de composition cinématiques

### a - Loi de composition des vitesses - point coïncident

Cherchons à exprimer la vitesse  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$  du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , nommée **vitesse absolue** en fonction de sa vitesse  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  nommée **vitesse relative** :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{O'M}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}$$

soit :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}}_{=\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(P=M)_{/\mathcal{R}} \text{ avec } P \text{ appelé point coïncident attaché à } \mathcal{R}' \text{ (cf schéma)}}$$

soit :

A RETENIR :

$$\underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}(M)_a} = \underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{v}(M)_r} + \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

COMMENTAIRES :

- $\vec{v}(M)_a = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}$  est la vitesse dite "absolue"
- $\vec{v}(M)_r = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$  est la vitesse dite "relative"
- $\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M}$  est appelée vitesse d'entraînement du référentiel  $\mathcal{R}'$  par rapport au référentiel  $\mathcal{R}$ . Elle représente concrètement la vitesse du point P, point **coïncident** avec  $M$  à l'instant  $t$ . Exprimé différemment, c'est simplement la vitesse à l'instant  $t$  d'un point solidaire du référentiel  $\mathcal{R}'$  qui est confondu avec  $M$  à ce même instant. Ceci est illustré sur le schéma ci-dessus.

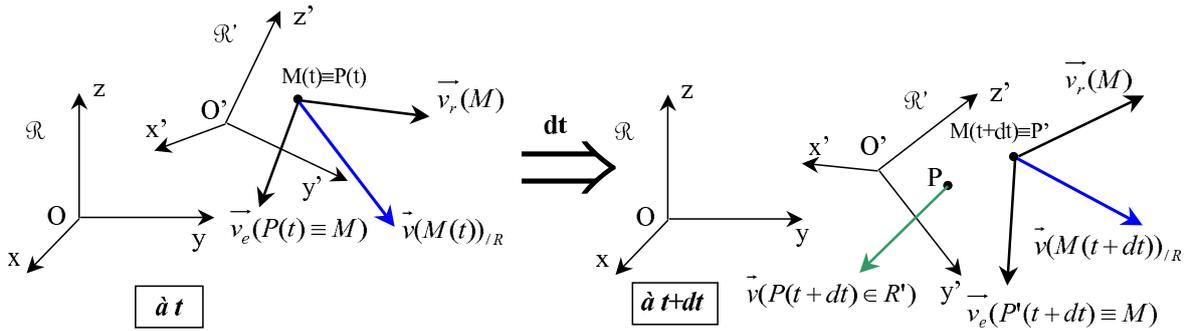


FIGURE I.4 – Composition galiléenne des vitesses

A RETENIR :

Pour les deux mouvements étudiés dans le cadre du programme, cela donne :

- **translation** :  $\omega_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$
- **rotation autour d'un axe fixe** :  $v(O')_{/\mathcal{R}} = 0 \Rightarrow \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$

**b - Loi de composition des accélérations**

Recherchons de même à exprimer l'accélération  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}}$  du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  (accélération absolue) en fonction de l'accélération  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$  du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  (accélération relative) :

Partons de l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}$$

que nous dérivons :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} &= \left. \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \left. \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left. \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} + \left. \frac{d\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \left. \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \\ &\quad + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left( \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} \right) + \vec{a}(O')_{/\mathcal{R}} \end{aligned}$$

soit finalement :

A RETENIR :

$$\underbrace{\vec{a}(M)_{/R}}_{=\vec{a}(M)_a} = \underbrace{\vec{a}(M)_{/R'}}_{=\vec{a}(M)_r} + \underbrace{\vec{a}(O')_{/R} + \frac{d\vec{\omega}_{R'/R}}{dt} \Big|_{/R} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{=\vec{a}_e(R'/R)} + \underbrace{2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}}_{=\vec{a}_c}$$

COMMENTAIRES :

- $\vec{a}(M)_a = \vec{a}(M)_{/R}$  est l'accélération dite "absolue"
- $\vec{a}(M)_r = \vec{a}(M)_{/R'}$  est l'accélération dite "relative"
- $\vec{a}_e(R'/R)$  est appelée accélération d'entraînement du référentiel  $R'$  par rapport au référentiel  $R$ . C'est l'accélération du point P, point **coincident** avec  $M$  à l'instant  $t$ , c'est à dire l'accélération à l'instant  $t$  d'un point solidaire du référentiel  $R'$  qui est confondu avec  $M$ .
- $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$  est l'accélération de "Coriolis" <sup>1</sup>

A RETENIR :

Pour les deux mouvements étudiés dans le cadre du programme, cela donne :

- TRANSLATION ( $\omega_{R'/R} = 0$ ) :

$$\boxed{\vec{a}(M)_a = \vec{a}(M)_r + \vec{a}(O')_{/R}}$$

- ROTATION UNIFORME AUTOUR D'UN AXE FIXE (ON CHOISIT  $[Oz] = [Oz']$ ) :

$$\boxed{\vec{a}(M)_a = \vec{a}(M)_r + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}) + 2\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}}$$

**c - Loi de composition des vitesses de rotation**

Supposons 3 référentiels  $R$  et  $R'$  et  $R''$  en mouvement relatif. On appelle :

$$\left[ \begin{array}{l} \vec{\omega}_{R''/R} \text{ vecteur vitesse de rotation de } R'' \text{ par rapport à } R \\ \vec{\omega}_{R''/R'} \text{ vecteur vitesse de rotation de } R'' \text{ par rapport à } R' \\ \vec{\omega}_{R'/R} \text{ vecteur vitesse de rotation de } R' \text{ par rapport à } R \end{array} \right.$$

Appelons  $A$  et  $B$  deux points solidaires du repère du référentiel  $R''$

En appliquant la formule de dérivation vectorielle au vecteur  $\overrightarrow{AB}$ , il vient :

$$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} \Big|_{R} = \vec{\omega}_{R''/R} \wedge \overrightarrow{AB} \tag{I.2}$$

1. Gaspard-Gustave Coriolis mathématicien et ingénieur français 1792-1843

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{AB} \quad (\text{I.3})$$

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} \wedge \vec{AB} \quad (\text{I.4})$$

En formant  $I.2 \equiv I.3$  et en remplaçant  $\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}$  par son expression donnée par I.4, on dégage finalement la relation de composition des vitesses de rotation :

A RETENIR :

$$\vec{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}''/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$$

**d - Référentiel galiléen - lois de composition galiléenne déduite de la définition**

QUESTION : Existe-t-il un classe singulière de référentiels dans lesquels tout point matériel isolé possède un mouvement rectiligne uniforme ?

RÉPONSE : les référentiels galiléens qui sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

DÉMONSTRATION : Considérons deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  dans lesquels le point matériel  $M$  isolé possède un mouvement rectiligne uniforme ; on a d'après la loi de composition des vitesses et la définition d'un référentiel galiléen :

$$\underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{cste}} = \underbrace{\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{cste}'} + \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$$

ce qui implique :

$$\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{cste}_e$$

En particulier tous les points fixes dans  $\mathcal{R}'$  possèdent la même vitesse constante dans  $\mathcal{R}$  puisque :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \underbrace{\vec{v}(M_{fixe})_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{cste}_e$$

Prenons en particulier deux points  $A$  et  $B$  fixes dans  $\mathcal{R}'$ , ce qui revient à dire que la direction  $\vec{AB}$  est fixe dans  $\mathcal{R}'$  ; nous avons alors :

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

et :

$$\underbrace{\vec{v}(B)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} - \underbrace{\vec{v}(A)_{/\mathcal{R}}}_{=\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} = \vec{0} = \left. \frac{d\vec{OB}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} - \left. \frac{d\vec{OA}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}}$$

soit :

$$\left. \frac{d\vec{AB}}{dt} \right|_{/\mathcal{R}} = \vec{0}$$

**Conclusions :**

- Toute direction fixe dans  $\mathcal{R}'$  est également une direction fixe dans  $\mathcal{R}$  donc :

**Les référentiels galiléens sont en translation les uns par rapport aux autres.**

- Puisque les référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont en translation l'un par rapport à l'autre, on a :

$$\underbrace{\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R})}_{=\vec{cst\vec{e}}} = \vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} \quad \text{i.e.} \quad \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}$$

donc finalement :

**Le centre d'un référentiel galiléen est en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel galiléen.**

A RETENIR :

**PROPRIÉTÉ - (I.2) - 2:**

*Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un autre référentiel réputé galiléen est également galiléen.*

TRANSFORMATION DE GALILÉE "SPÉCIALE" :

Supposons toujours deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  avec  $O'$  de vitesse  $\vec{v}(O')_{/\mathcal{R}} = v_e \cdot \vec{i}' = \vec{cst\vec{e}}$  dans  $R$ .

La loi de composition des vitesses s'écrit :

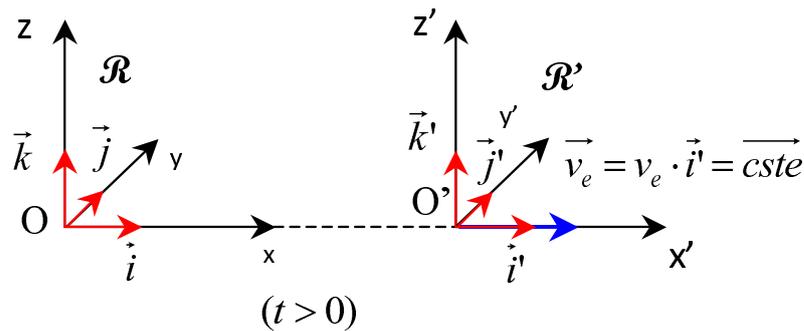


FIGURE I.5 – Deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} + v_e \cdot \vec{i}'$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}} = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ \dot{z}' \end{pmatrix}_{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'} + \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'}$$

ATTENTION : les vecteurs  $\vec{i}' = \vec{i}$ ,  $\vec{j}' = \vec{j}$ ,  $\vec{k}' = \vec{k}$  sont invariants dans le temps!!!!

soit en intégrant par rapport au temps :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_e \cdot t + cste_{x'} \\ cste_{y'} \\ cste_{z'} \end{pmatrix}$$

avec les CI  $x(t=0) = x'(t=0)$ ,  $y(t=0) = y'(t=0)$ , et  $z(t=0) = z'(t=0)$  on obtient finalement la transformation "spéciale" (uniaxe) de Galilée :

A RETENIR :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_e \cdot t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t = t'$$

### e - Véritable caractère du temps : une quatrième coordonnée!!!

La mécanique newtonienne postule une invariance du temps qui s'écoule de la même manière quelques soient les référentiels choisis pour décrire un événement, en particulier pour les référentiels galiléens. Ce postulat admis jusqu'au début du XX<sup>ième</sup> siècle, appuyé sur le constat des expériences antérieures fut mis en défaut par Albert Einstein lors de la publication en 1905 de sa théorie de **relativité restreinte**. Nous proposons ici d'aborder très succinctement un de ses aspects les plus «troublants» pour le sens commun :

la relativité du temps dont la façon de s'écouler dépend étroitement du référentiel considéré. Les conséquences en sont tout à fait remarquables, et contredisent largement notre approche de la mesure des durées!!!

**NB :** relativité «RESTREINTE»  $\Leftrightarrow$  LIMITÉE À L'ANALYSE DES RÉFÉRENTIELS GALILÉENS

A RETENIR (SECOND POSTULAT DE LA RELATIVITÉ) :

la célérité de la lumière est invariante par changement de référentiel galiléen.

Supposons toujours deux référentiels galiléens  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et  $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  avec  $\mathcal{R}'$  en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  selon la vitesse d'entraînement  $\vec{v}_e = v_e \cdot \vec{i}$ .

HYPOTHÈSES :

- A  $t = 0$   $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  coïncident.
- $\mathcal{R}'$  est équipé d'une source lumineuse en  $O'$  émettant une impulsion à  $t = 0$  et d'un miroir également solidaire de ce référentiel disposé perpendiculaire à l'axe  $[Oz]$ .
- Ce signal lumineux est réfléchi et renvoyé sur l'émetteur.

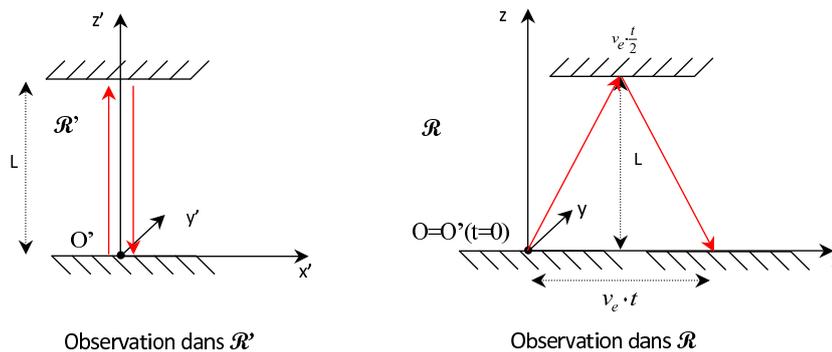


FIGURE I.6 – Dilatation des temps

Calculons les durées de trajets de la lumière  $t'$  et  $t$  respectivement dans les deux référentiels  $\mathcal{R}'$  et  $\mathcal{R}$  :

- Dans  $\mathcal{R}'$  :

$$t' = \frac{2L}{c}$$

- Dans  $\mathcal{R}$  :

$$t = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{L^2 + \frac{v_e^2 \cdot t^2}{4}} \Rightarrow t^2 \left( 1 - \frac{v_e^2}{c^2} \right) \cdot \underbrace{\frac{4L^2}{c^2}}_{=t'^2}$$

soit :

$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} = \gamma t' \quad \text{en posant habituellement le facteur } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Ce dernier résultat montre que les durées de trajet sont différentes suivant que l'on observe les événements dans  $\mathcal{R}'$  ou bien  $\mathcal{R}$ .

A RETENIR :

Le passage du référentiel propre  $\mathcal{R}'$  i.e. dans lequel se produisent les évènements, au référentiel  $\mathcal{R}$  provoquent une "dilatation" de la durée. On parle de dilatation du temps propre.

ORDRE DE GRANDEUR :

- Pour une balle de carabine calibre 243 Winchester de vitesse nominale  $1200 m.s^{-1}$  pour laquelle le temps propre serait de  $1s$ , on obtient une durée de trajet dans  $\mathcal{R}$  de :

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1200}{3.10^8}\right)^2}} \simeq (1 + 10^{-11}) s$$

- Pour une particule muon issue de la collision des rayons cosmiques avec les particules de haute atmosphère la durée de vie propre prévue est de l'ordre de  $t' = 2.2 \mu s$  pour une vitesse de l'ordre de  $0.99c$ . En absence d'effet relativiste, la distance parcourue serait alors de :

$$d' \sim 0.99ct' \simeq 650 m$$

Cette distance bien trop faible interdit la détection du moindre muon au niveau du sol.

Or les muons sont bel et bien détectés sur Terre ; en effet, dans le référentiel du sol terrestre (supposé galiléen ici), nous avons une durée de vie attendue de :

$$t = \frac{2,2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - 0.99^2}} \simeq 16 \mu s$$

Cette durée de vie autorise un parcours de  $d = 4630 m$  permettant finalement une détection des muons au niveau du sol, ce qui est effectivement observé.

## II Le changement de référentiel : lois dynamiques et énergétiques des référentiels non galiléens

OBJECTIFS DE CE PARAGRAPHE : analyser les aspects dynamiques et énergétiques lors du changement de référentiels : PFD, TMC, TEC

## II.1 Rappel fondamental : les 3 postulats de Newton (MPSI)

La mécanique classique<sup>2</sup> est édifée sur la base de 3 postulats fondamentaux dont la publication en version finale fut l'oeuvre de Newton en 1687 dans le recueil *Principia Mathematica*.  
On rappelle brièvement ici le contenu de ces 3 lois :

- **Première loi** : *Tout point matériel  $M$  isolé est au repos ou possède un mouvement rectiligne uniforme par rapport à tout référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ . Cet état ne peut changer que si une force l'y contraint :*

$$\vec{v}(M)|_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{cste}$$

- **Seconde loi ou relation fondamentale de la dynamique** : *Tout point matériel  $M$  soumis à une résultante de  $n$  forces "vraies" (i.e. action d'un acteur!)  $\vec{R} = \sum_i^n \vec{F}_i$  vérifie dans le référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen la relation suivante :*

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}} \quad \text{avec } \vec{p} = m \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}}$$

**NB** :  $m$  est la masse inerte identifiée à la masse grave (cf MPSI)

- **Troisième loi ou principe des actions réciproques** : *Un point matériel  $M_1$  soumis à l'action d'un autre point matériel  $M_2$  exerce à son tour une action sur  $M_2$  de même intensité et de même direction, mais de sens opposé :*

$$\boxed{\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} = -\vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}}$$

On admettra dans le cadre classique de ce cours le caractère instantané de la réponse de  $M_1$  sur  $M_2$ .

## II.2 Les lois de la dynamique en référentiel non galiléen

- a - **Relation fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen : pseudo-forces**

Nous reprenons toujours le cas de nos deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  ; nous avons montré la relation de composition des accélérations :

$$\underbrace{\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}}}_{=\vec{a}(M)_a} = \underbrace{\vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}(M)_r} + \underbrace{\vec{a}(O')|_{\mathcal{R}} + \frac{d\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})}_{=\vec{a}_c(\mathcal{R}'/\mathcal{R})} + \underbrace{2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)|_{\mathcal{R}'}}_{=\vec{a}_c}$$

2. soit non relativiste et non quantique

HYPOTHÈSE : on suppose  $\mathcal{R}$  galiléen.

Deux cas de figure peuvent se présenter :

- Si :  $\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cste} \implies$  le référentiel  $\mathcal{R}'$  est galiléen avec :  $\left[ \begin{array}{l} \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0} \\ \vec{a}_c = \vec{0} \end{array} \right.$

CONSÉQUENCE IMMÉDIATE :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$

et la RFD est inchangée lors du changement de référentiel :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i^n \vec{F}_i$$

- Si :  $\vec{v}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \neq \overrightarrow{cste} \implies$  le référentiel  $\mathcal{R}'$  est non galiléen avec  $\left[ \begin{array}{l} \vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \neq \vec{0} \\ \vec{a}_c \neq \vec{0} \text{ si } \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0} \end{array} \right.$

CONSÉQUENCE IMMÉDIATE :  $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} \neq \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'}$

On peut alors présenter la relation fondamentale de la dynamique de deux manières :

◇ formulation dans  $\mathcal{R}$  :  $m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \sum_i \vec{F}_i(M)$

◇ formulation dans  $\mathcal{R}'$  :  $m [\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)] = \sum_i \vec{F}_{ext}(M)$   
soit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \underbrace{\sum_i \vec{F}_i(M)}_{\text{forces vraies}} \underbrace{-ma_e(M)}_{\substack{\text{pseudo-forces} \\ \text{d'inertie d'entraî-} \\ \text{nement} = \vec{F}_{ie}}} \underbrace{-ma_c(M)}_{\substack{\text{pseudo-forces} \\ \text{d'inertie de Coriolis} \\ = \vec{F}_{ic}}} = \sum_i \vec{F}_i(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

REMARQUE - (II.2) - 3:

Les nouveaux termes apparaissant dans le membre de droite de la RFD sont appelés **pseudo-forces** :

- elles ne sont pas le résultat d'une interaction entre deux acteurs.
- elles sont la conséquence immédiate du mouvement du référentiel dans lequel on pose la RFD. On les appelle aussi **forces de repère**, ou **forces inertielles**.

**b - Théorème du moment cinétique en référentiel non galiléen**

On considère toujours  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  galiléen et  $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  non galiléen en mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}$ .

Un point matériel  $M$  de masse  $m$  possède dans  $\mathcal{R}'$  le moment cinétique en  $O'$  :

$$\overrightarrow{L_{O'\mathcal{R}'}}(M) = m\overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$$

qui donne par dérivation :

$$\left. \frac{d\overrightarrow{L_{O'\mathcal{R}'}}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = m \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{OM} \wedge m \underbrace{\left. \frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'}}_{=\sum_i \vec{F}_i(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}}$$

soit finalement en posant la résultante de forces vraies  $\vec{R}(M) = \sum_i \vec{F}_i(M)$  :

A RETENIR : **théorème du moment cinétique en  $O$  dans  $\mathcal{R}'$**

$$\boxed{\left. \frac{d\overrightarrow{L_{O'\mathcal{R}'}}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \vec{M}_O(\vec{R}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ie}) + \vec{M}_O(\vec{F}_{ic})}$$

**c - Théorème de l'énergie cinétique en référentiel non galiléen**

L'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$E_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) = \frac{1}{2} m \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}^2$$

qui donne en différenciant :

$$\begin{aligned} dE_{c_{/\mathcal{R}'}}(M) &= m \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) \cdot d\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) = m \vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M) \cdot \frac{d\vec{v}_{/\mathcal{R}'}(M)}{dt} \cdot dt \\ &= \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \cdot [\vec{R} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}] dt = \delta W(\vec{R}) + \delta W(\vec{F}_{ie}) + \delta W(\vec{F}_{ic}) \end{aligned}$$

En outre :

- si  $\mathcal{R}'$  est en translation par rapport à  $\mathcal{R}$  :  $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0} \implies \vec{F}_{ic} = \vec{0}$

$$\implies \boxed{\delta W(\vec{F}_{ic}) = 0}$$

- si  $\mathcal{R}'$  est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$  :  $\delta W(\vec{F}_{ic}) = -2m [\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}] \cdot \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \cdot dt$

$$\implies \boxed{\delta W(\vec{F}_{ic}) = 0}$$

Ainsi, on a finalement :

A RETENIR : les théorèmes de l'énergie et de la puissance cinétique, soit :

$$dE_{c/\mathcal{R}'}(M) = \delta W(\vec{R}) + \delta W(\vec{F}_{ie})$$

que l'on peut intégrer entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\Delta_{t_1 \rightarrow t_2} E_{c/\mathcal{R}'}(M) = W_{t_1 \rightarrow t_2}(\vec{R}) + W_{t_1 \rightarrow t_2}(\vec{F}_{ie})$$

ou bien diviser par  $dt$  pour obtenir le **théorème de la puissance cinétique dans  $\mathcal{R}'$**

$$\left. \frac{dE_{c/\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \frac{\delta W(\vec{R})}{dt} + \frac{\delta W(\vec{F}_{ie})}{dt}$$

### II.3 RFD dans les mouvements simples de référentiels

#### a - Référentiel entraîné en translation par rapport à un autre référentiel réputé galiléen

Si le référentiel  $\mathcal{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est en translation rectiligne accéléré par rapport à  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  galiléen, soit  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \vec{0}$  et  $\vec{a}_e(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{a}(O')/\mathcal{R}$  :

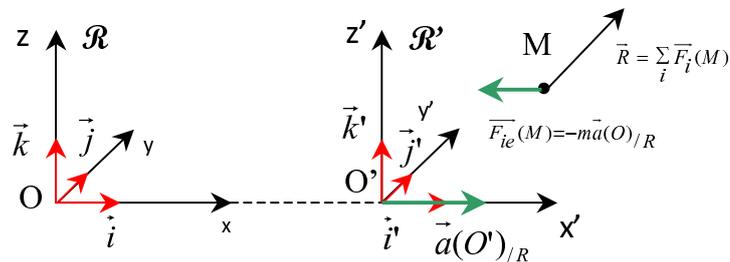


FIGURE I.7 – Translation accélérée de  $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$

On a pour tout point  $M$  :

on a :

$$\begin{cases} \vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\vec{a}(O')/\mathcal{R} \\ \vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0} \end{cases}$$

d'où :

A RETENIR :

$$\text{translation } \mathcal{R}'/\mathcal{R} \Leftrightarrow m\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i \vec{F}_i(M) - m\vec{a}(O')/\mathcal{R}$$

**b - Référentiel entraîné en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à un autre référentiel réputé galiléen : force "centrifuge" et force de Coriolis**

Si maintenant le référentiel  $\mathcal{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  est en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à  $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  galiléen, par exemple dans la configuration suivante  $\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega \vec{k} = \text{cste}$  et  $O' \equiv O$  :

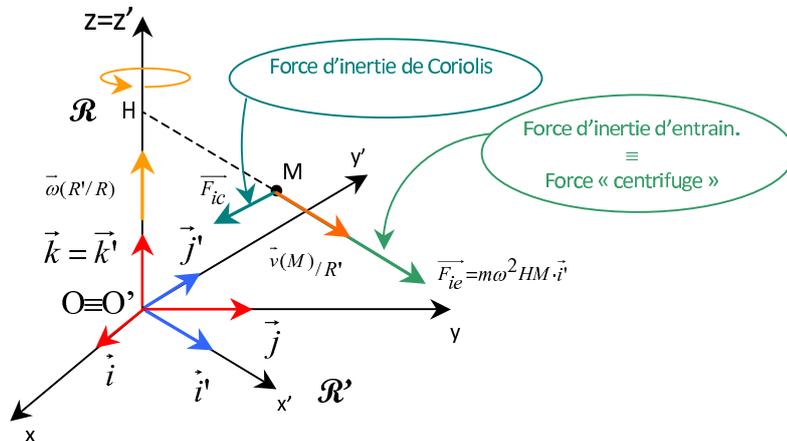


FIGURE I.8 – Rotation uniforme de  $\mathcal{R}'/\mathcal{R}$  autour de  $[Oz)$

HYPOTHÈSE : choisissons arbitrairement un point  $M$  animé d'une vitesse relative  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = v(M)_{/\mathcal{R}'} \cdot \vec{i}'$   
on a :

$$\begin{cases} \vec{F}_{ic} = -m\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{OM}] = -m\omega \vec{k}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge [\omega(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \cdot HM \cdot \vec{j}'] = +m\omega^2 HM \cdot \vec{i}' \\ \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} \end{cases}$$

ainsi,

A RETENIR :

Rotation uniforme selon  $[Oz)$  de  $\mathcal{R}'/\mathcal{R} \Leftrightarrow m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \sum_i \vec{F}_i(M) + m\omega^2 \vec{HM} - 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$

### III Référentiels utiles et leur propriétés

NOTE PRÉLIMINAIRE : dans toute la suite, nous poserons l'identité de la masse grave  $m^*$  apparaissant dans la loi de gravitation, et de la masse inerte  $m$  apparaissant dans la quantité d'accélération (premier membre de la RFD). Ceci fut démontré expérimentalement par Newton (expérience du tube de Newton).

### III.1 Le référentiel de Copernic

**DÉFINITION - (III.1) - 2:**

Le référentiel de Copernic a pour centre le centre de masse du système solaire, et ses trois axes normaux pointent vers des étoiles réputées fixes dans la voute céleste.

**IMPORTANT :** ce référentiel est postulé Galiléen.

**Formulation de la RFD :**

Dans ce référentiel, un point matériel  $M$  de masse  $m$  est soumis aux force suivantes :

$$\begin{cases} m \vec{\mathcal{G}}_T(M) & \text{force gravitationnelle exercée par la Terre sur } m \\ m \vec{\mathcal{G}}_a(M) & \text{force gravitationnelle exercée par tous les autres astres du } \Sigma \text{ solaire sur } m \\ \vec{R} & \text{Résultante de forces autres que la gravitation s'exerçant sur } M \end{cases}$$

avec  $\vec{\mathcal{G}}_i(M) = -G \frac{m_i}{M_i M^3} \cdot \overrightarrow{M_i M}$

NB :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$  cste de la gravitation universelle

Ainsi, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans ce référentiel :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Cop}} = \vec{R} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_a(M)$$

### III.2 Le référentiel géocentrique

**a - Définition et RFD**

**DÉFINITION - (III.2) - 3:**

Le référentiel géocentrique a pour centre le centre de masse de la Terre  $T$ , et ses trois axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic i.e.  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}_{geo}/\mathcal{R}_{Cop}} = \vec{0}$ .

**CONSÉQUENCE DE LA DÉFINITION :** le référentiel géocentrique est en translation quasi-circulaire par rapport au référentiel de Copernic <sup>a</sup>. Il est donc non galiléen.

<sup>a</sup>. son centre décrit un quasi-cercle autour du centre du référentiel de Copernic

**Formulation de la RFD :**

Ce référentiel n'est pas galiléen  $\implies$  on doit ajouter aux forces déjà évoquées dans le cas du référentiel de Copernic les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \vec{R} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_a(M) + \vec{F}_{ie} + \underbrace{\vec{F}_{ic}}_{= \vec{0} \text{ car } \vec{\omega}_{geo/Cop} = \vec{0}}$$

Par ailleurs,  $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}}$   
donc :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \vec{R} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_a(M) - m \vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}}$$

or la RFD appliquée à la Terre dans le référentiel de Copernic conduit à :  $\vec{a}(T)_{/\mathcal{R}_{Cop}} = \vec{\mathcal{G}}_a(T)$   
donc finalement :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{Geo}} = \vec{R} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \underbrace{[\vec{\mathcal{G}}_a(M) - \vec{\mathcal{G}}_a(T)]}_{\text{force de marée} = \vec{F}_{marées}}$$

**b - Caractère galiléen approché de ce référentiel - approche succincte des marées**

IDÉE : proposons-nous de comparer semi-quantitativement le terme de force de marée au terme de force de gravitation terrestre ; si le premier peut être négligé face au second, alors nous pourrions conclure sur le **caractère galiléen approché du référentiel géocentrique**, les études mécaniques dans ce référentiel s'en trouveront naturellement simplifiées!!!

QUESTION : les 5 astres les plus susceptibles d'influencer la mécanique terrestre par effet de gravitation (en raison de leur masse et/ou de leur proximité) sont le Soleil, Venus, la Lune, Mars et Jupiter. Evaluons les champs gravitationnels de chacun au centre de la Terre  $T$ . Lesquels retenir dans les marées ?

	Terre	Soleil	Venus	Lune	Mars	Jupiter
distance moyenne à la Terre ( $m$ )	0	$1,5 \cdot 10^{11}$	$1,5 \cdot 10^{11}$	$3,5 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^{11}$
masse ( $kg$ )	$5,97 \cdot 10^{24}$	$2 \cdot 10^{30}$	$4,8 \cdot 10^{24}$	$7,3 \cdot 10^{22}$	$6,4 \cdot 10^{23}$	$1,9 \cdot 10^{27}$
Champ gravit. sur $T$ $\mathcal{G}(T)$ ( $m \cdot s^{-2}$ )	$0^3$	$6 \cdot 10^{-3}$	$1,4 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-7}$

Ces résultats confirment ce que nous savons déjà : seuls la Lune et le Soleil exercent un effet gravitationnel notoire sur la Terre.

EVALUATION PLUS FORMELLE DU TERME DE MARÉE :

Supposons notre système composé de seulement deux astres : un astre  $T(m_T)$  dans le champ de gravitation d'un astre  $S(m_S)$  et plaçons un point  $M(m)$  en surface de  $T$  tel que T,S, et M soient alignés. La force de marée exercée par  $S$  en  $M$  s'écrit :

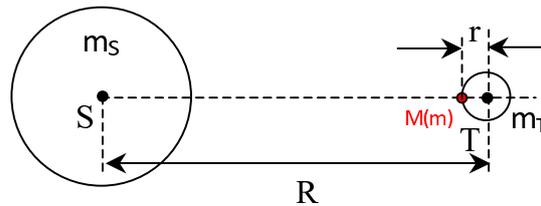


FIGURE I.9 – Evaluation de l'ordre de grandeur des marées

$$\vec{F}_{\text{marées}} = m \left[ \vec{\mathcal{G}}_S(M) - \vec{\mathcal{G}}_S(T) \right] = -\frac{Gm_S m}{(R-r)^2} \vec{e}_r + \frac{Gm_S m}{R^2} \vec{e}_r = -Gmms \left[ \frac{1}{R^2 \left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - \frac{1}{R^2} \right] \vec{e}_r$$

soit en réalisant un DL au premier ordre avec  $r \ll R$  :

$$\vec{F}_{\text{marées}} = -Gmms \left[ \frac{1}{R^2} \left(1 + 2\frac{r}{R}\right) - \frac{1}{R^2} \right] \vec{e}_r$$

et finalement :

$$\vec{F}_{\text{marées}} = -m \underbrace{\frac{2Gm_S}{R^3} r}_{\vec{\mathcal{G}}_{\text{marées}}} \cdot \vec{e}_r$$

Comparons maintenant l'effet de marée du soleil à l'effet de gravitation de la Terre à sa surface :

$$\alpha_{\text{marées/grav.T}} = \frac{\frac{2Gm_S}{R_0^3} r}{\frac{Gm_T}{r^2}} = \frac{2m_S}{m_T} \frac{R_T^3}{ST^3} \simeq \boxed{5.10^{-8} \ll 1}$$

A RETENIR : On peut considérer le référentiel géocentrique comme Galiléen avec **une excellente approximation.**

REMARQUE - (III.2) - 4:

En reprenant cette démonstration pour un point  $M$  toujours situé sur l'équateur mais sur l'autre "face" de la Terre, on obtient sans peine :

$$\vec{F}_{\text{marées}} = +m \underbrace{\frac{2Gm_S}{R^3} r}_{\vec{g}_{\text{marées}}} \cdot \vec{e}_r$$

On peut dès lors expliquer le phénomène des "bourrelets océaniques" à l'origine des marées :

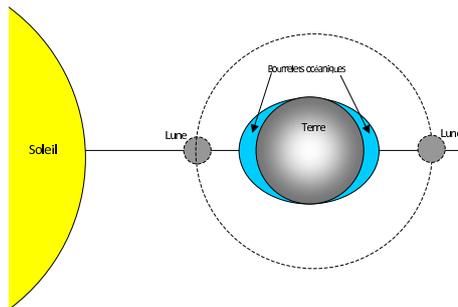


FIGURE I.10 – Bourrelets océaniques dans la configuration de marées la plus favorable i.e. au moment des équinoxes (alignement soleil, Lune, Terre)

REMARQUE - (III.2) - 5:

On évoque souvent le rôle prépondérant de la lune dans les phénomènes de marées océaniques. C'est un peu troublant lorsque l'on compare les valeurs numériques du tableau ci-dessus qui laissent apparaître que  $\mathcal{G}_{\text{Soleil}}(T) \gg \mathcal{G}_{\text{Lune}}(T)$ . En fait, la force de marée est une force différentielle (cf son expression primaire) ce qui change tout !!! Evaluons le rapport des forces de marées dues à la Lune et celle dues au Soleil :

$$\alpha_{\text{marées Lune/marées Soleil}} = \frac{m_L d_{TS}^3}{m_S d_{TL}^3} \simeq 2,4 \implies \text{OK!!!}$$

Ainsi, l'action de la lune est prépondérante sur celle du soleil à hauteur d'un facteur 2 environ

### III.3 Le référentiel terrestre

#### a - Définition et RFD

**DÉFINITION - (III.3) - 4:**

Un référentiel terrestre  $\mathcal{R}_{terr}$  a pour centre un point solidaire du mouvement propre de la Terre et des axes rigidement liés à la Terre également. Ainsi, la Terre constitue le solide de référence du référentiel terrestre (logique!!!).

On appellera dans la suite  $\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{e}_{z_0}$  le vecteur rotation propre de la Terre autour de ses pôles.

**Le référentiel terrestre est non galiléen**

ASSEZ SOUVENT : on choisit le centre  $O$  de ce référentiel en un point de la surface de la Terre et les trois axes :

- [  $Ox$  ) pointant vers l'est
- [  $Oy$  ) pointant vers le nord
- [  $Oz$  ) radial depuis le centre de la Terre

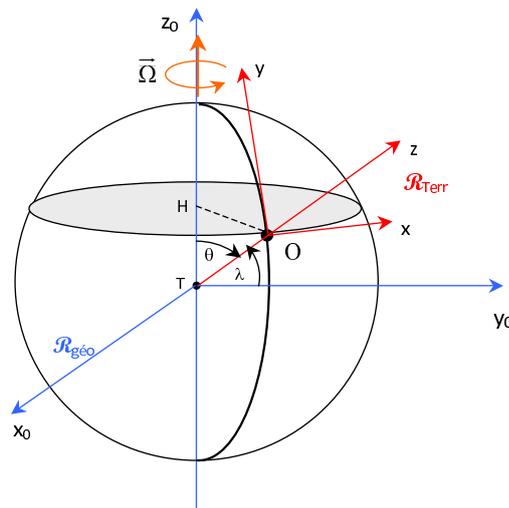


FIGURE I.11 – Référentiels géocentrique  $\mathcal{R}_{geo}$  et terrestre  $\mathcal{R}_{Terr}$

**Formulation de la RFD :**

**NB :** pour cette démonstration, on choisit l'origine de  $\mathcal{R}_{terr}$  au centre de la Terre  $T$  :  $\mathcal{R}_{terr} = [T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z]$ .

A l'instar du référentiel géocentrique, les référentiels terrestres ne sont pas galiléens non plus  $\implies$  on doit ajouter aux forces déjà évoquées dans le cas du référentiel géocentrique les pseudo-forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis liées à la rotation de la Terre. On reprend l'établissement de la RFD afin de bien comprendre l'origine des différents termes :

**NB :** on appellera  $\mathcal{R}_{terr}$  le référentiel terrestre.

La RFD appliquée à un point  $M$  de masse  $m$  mobile de vitesse  $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}}$  dans le référentiel terrestre s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \vec{R} + m \vec{\mathcal{G}}_T(M) + m \vec{\mathcal{G}}_a(M) + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \vec{F}_{ie} = -m \vec{a}(T)_{\mathcal{R}_{Cop}} - m \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overline{TM}] \\ \vec{F}_{ic} = -2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} \\ \vec{a}(T)_{\mathcal{R}_{Cop}} = \vec{\mathcal{G}}(T)_a \quad (\text{par RFD appliqué à la Terre dans } \mathcal{R}_{Cop}) \end{cases}$$

ainsi :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \vec{R} + m \overbrace{\left[ \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{TM}) \right]}^{=\vec{g}} + m \underbrace{\left[ \vec{\mathcal{G}}_a(M) - \vec{\mathcal{G}}_a(T) \right]}_{\text{Forces de marées}} - \underbrace{2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}}}_{\text{Force de Coriolis}}$$

on négligera par la suite la contribution des forces de marées (cf justification plus haut en IV.2.b) :

A RETENIR :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}} = \vec{R} + m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}_{terr}}$$

**b - Force centrifuge et "pesanteur vulgaire" en détail**

**DÉFINITION - (III.3) - 5:**

Le poids d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  ou pesanteur vulgaire est l'addition des effets de gravitation de la Terre et de la pseudo-force centrifuge liée à la rotation de la Terre :

$$\vec{P} = m \vec{g}(M) = m \left[ \vec{\mathcal{G}}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overline{TM}) \right]$$

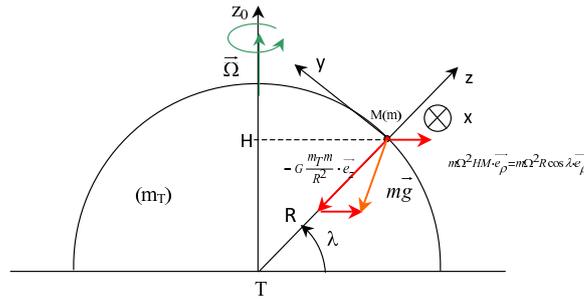


FIGURE I.12 – Effet de la force centrifuge : définition de la pesanteur vulgaire

EVALUATION :

Le champ de pesanteur vulgaire s'écrit :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{TM}) = -\frac{Gm_T}{R_T^2} \vec{e}_z + \Omega^2 AH \cdot \vec{e}_\rho$$

soit :

$$\vec{g} = -\frac{Gm_T}{R^2} \vec{e}_z + \Omega^2 R \cos \lambda \cdot \vec{e}_\rho$$

Les composantes du champ de pesanteur vulgaire dans  $(M; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  sont donc :

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_x = 0 \\ g_y = -\Omega^2 R \cos \lambda \sin \lambda \\ g_z = -\frac{Gm_T}{R^2} + \Omega^2 R \cos^2 \lambda \end{pmatrix}_{(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)}$$

QUELQUES ORDRES DE GRANDEURS :

- Champ de pesanteur aux pôles  $\lambda_p = \frac{\pi}{2}$  (valeur la plus élevée)

$$\implies \vec{g}_p = g_z \cdot \vec{e}_z = -\frac{Gm_T}{R^2} \cdot \vec{e}_z \implies g_p \simeq 9,83 \text{ m.s}^{-2}$$

- Champ de pesanteur à l'équateur  $\lambda_e = 0$  (valeur la plus faible)

$$\implies \vec{g}_e = g_z \cdot \vec{e}_z = \left( -\frac{Gm_T}{R^2} + \Omega^2 R \right) \cdot \vec{e}_z \implies g_e \simeq 9,78 \text{ m.s}^{-2}$$

c - Force de Coriolis et déviation vers l'est en détail (et ordres de grandeur !)

Sous forme d'un exercice simple : chute libre d'un point matériel.

HYPOTHÈSES :

- Chute d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans le champ de pesanteur vulgaire  $\vec{g}$  depuis une altitude  $h$  sans vitesse initiale.
- On modifie les axes du référentiel terrestre en choisissant la verticale  $z$  selon la direction de la pesanteur  $\vec{g} \Rightarrow$  bien plus simple!!!

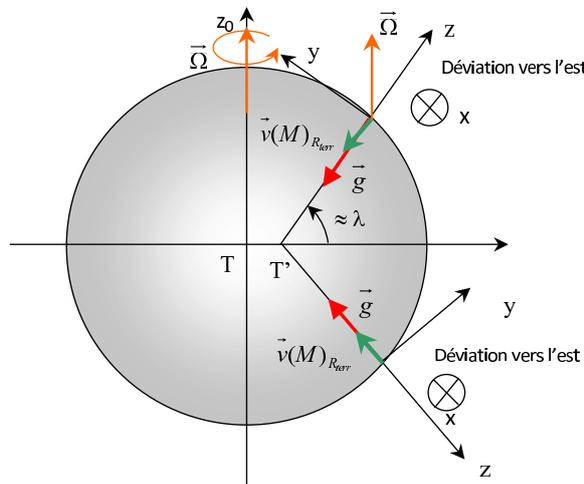


FIGURE I.13 – Effet terrestre de la force de Coriolis : déviation vers l'est

**Exercice de cours:** (III.3) - n° 1 *Confirmer qualitativement que tout corps en chute libre dans le référentiel terrestre subit une déviation vers l'est quel que soit l'hémisphère concernée (on négligera la résistance de l'air).*

Appliquons la RFD dans le référentiel terrestre :

$$m \vec{a}(M)_{/R_{terr}} = m \vec{g} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)_{/R_{terr}}$$

soit :

$$m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{vmatrix} - 2m \begin{vmatrix} 0 \\ \Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix}$$

soit :

$$\begin{cases} (1) & \ddot{x} = -2\Omega\dot{z} \cos \lambda + 2\Omega\dot{y} \sin \lambda \\ (2) & \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ (3) & \ddot{z} = -g + 2\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

En intégrant (3) sans tenir compte de l'effet de Coriolis qui est négligeable face à  $g$ , on a :

$$\dot{z} \simeq -gt \implies z \simeq -\frac{1}{2}gt^2 + h$$

En outre, comme  $\dot{z} \gg \dot{y}$  on peut intégrer facilement (1) :

$$\dot{x} \simeq \Omega \cos \lambda gt^2$$

puis

$$\implies x \simeq \frac{1}{3}\Omega \cos \lambda gt^3$$

soit pour une hauteur de chute  $h$  et donc un temps de chute de  $t_c = \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$  :

$$\implies x_{t_c} \simeq \frac{1}{3}\Omega \cos \lambda g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$$

REMARQUE - (III.3) - 6:

Cette expérience de chute libre a été menée en 1831 par Reich<sup>a</sup> à Freiberg (ville minière de la saxe) dans un puits de mine d'une profondeur de 158 m à la latitude de  $\lambda = 51^\circ$ . Son résultat expérimental donna :

$$x_{exp}(158 \text{ m}) = 2,83 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

et la valeur théorique calculée donne  $x_{th}(158 \text{ m}) = 2,74 \cdot 10^{-2} \text{ m}$  ce qui est remarquablement proche, l'écart résultant notamment de la non prise en compte du frottement contre l'air forcément présent dans l'expérience de Reich.

a. Ferdinand Reich 1799-1863 physicochimiste allemand

**d - Caractère galiléen approché de ce référentiel**

NB :  $\vec{F}_{\text{marées}}$  toujours abandonnées.

On peut caractériser le caractère galiléen approché et **apparent** du référentiel terrestre en évaluant par exemple la limite de vitesse pour laquelle le rapport entre l'accélération de Coriolis et l'accélération de pesanteur vulgaire est significatif :

$$\alpha_{Corio./Pesant} = \frac{\|2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M)\|}{g} \sim \frac{2\Omega \cdot v(lim)_{\mathcal{R}_{terr}}}{g} \leq 0.1$$

soit :

$$v(lim)_{\mathcal{R}_{terr}} \leq \frac{0.1g}{2\Omega} \simeq 6,700 \text{ km.s}^{-1}!!!$$

Ainsi, dans la majorité des expériences courantes (hors tir d'une fusée ou d'une balle de fusil à grande distance), on pourra considérer le référentiel terrestre comme une bonne approximation d'un référentiel galiléen.

## IV Quelques applications simples

### IV.1 Cas de la translation accélérée

- **Le pendule dans la voiture :**

on suppose une voiture se déplaçant sur l'axe  $[Ox)$  en accélération constante  $\vec{a} = a \cdot \vec{i}$  et un pendule suspendu à son plafond. On stabilise le pendule en position "d'équilibre relatif" pendant l'accélération.

QUESTION : quel est la valeur de l'angle d'équilibre  $\theta_e$  d'inclinaison par rapport à la verticale dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

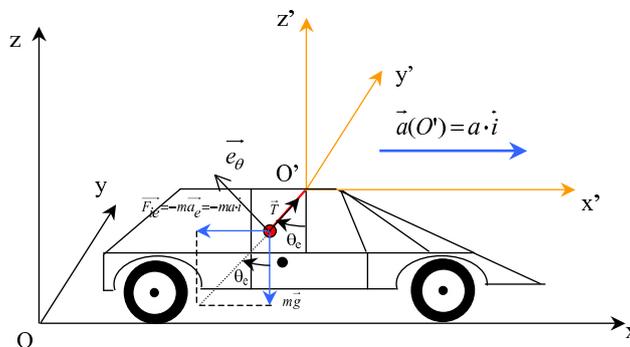


FIGURE I.14 – Pendule dans une voiture en accélération rectiligne uniforme

On suppose  $\mathcal{R}(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  galiléen et on attache  $\mathcal{R}'(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$  rigidement à la voiture

$$\implies \boxed{\mathcal{R}' \text{ est en translation par rapport à } \mathcal{R}}$$

$$\text{On a : } \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0} \implies \boxed{\vec{a}_e = \vec{O}'_{\mathcal{R}} = a \cdot \vec{i} \text{ et } \vec{a}_c = \vec{0}}$$

La RFD dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{0} \quad \text{car équilibre dans } \mathcal{R}'$$

En projetant cette relation sur la direction  $\vec{e}_\theta$ , il vient :

$$0 = -mg \sin \theta_e + ma \cos \theta_e$$

soit finalement :  $\boxed{\tan \theta_e = \frac{a}{g}}$

- **L'Airbus "0G" (pour l'entraînement des spationautes !!) et le vaisseau spatial (pour de vrai cette fois !!) :**

Depuis 1996, la société Novespace filiale du CNES exploite un AIRBUS A300 aménagé pour réaliser des vols paraboliques, permettant de recréer des conditions de microgravité propres aux séjours dans la station spatiale internationale (ISS). En outre, ces vols d'une durée d'environ 20 s chacun permettent de réaliser quelques expériences de physique en condition de microgravité. Le principe est le suivant :

Supposons un point  $M(m)$  dans un référentiel non galiléen

$\mathcal{R}'(O'; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   $\begin{cases} \text{en translation} \\ \text{en chute libre donc présence de gravité } \vec{g} \end{cases}$  par rapport à  $\mathcal{R}_{terr}$  supposé galiléen ; la RFD dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit :

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m \vec{g} + \vec{F}_{ie} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i(M)}_{= \vec{0} \text{ car chute libre}} = m (\vec{g} - \vec{a}(O')_{\mathcal{R}})$$

or  $\vec{a}(O')_{\mathcal{R}} = \vec{g}$  puisque  $\mathcal{R}'$  est en chute libre donc :

$$\boxed{\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \text{le référentiel } \mathcal{R}' \text{ est pseudo-galiléen, ou inertielle}}$$

Ce principe est justement exploité dans l'AIRBUS "0g" qui peut se transformer en référentiel inertielle. Le schéma ci-dessous détaille les différentes phases des vols paraboliques de l'avion :

Dans un vaisseau spatial plongé dans l'espace interstellaire et avec **moteurs coupés**, le principe est le même : supposons  $M$  point matériel de masse  $m$  à l'intérieur du vaisseau spatial soumis au champ gravitationnel résultant  $\vec{\mathcal{G}}(M)$  des astres environnants . Appelons  $\mathcal{R}'$  le référentiel en translation dont le centre  $O'$  est confondu avec le centre de masse du vaisseau.

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m \mathcal{G}(M) - m \vec{a}_e = m \vec{\mathcal{G}}(M) - m \vec{a}(O')$$

or la RFD appliqué au vaisseau de masse  $M_v$  donne :

$$M_v \vec{a}(O') = M_v \vec{\mathcal{G}}(O')$$

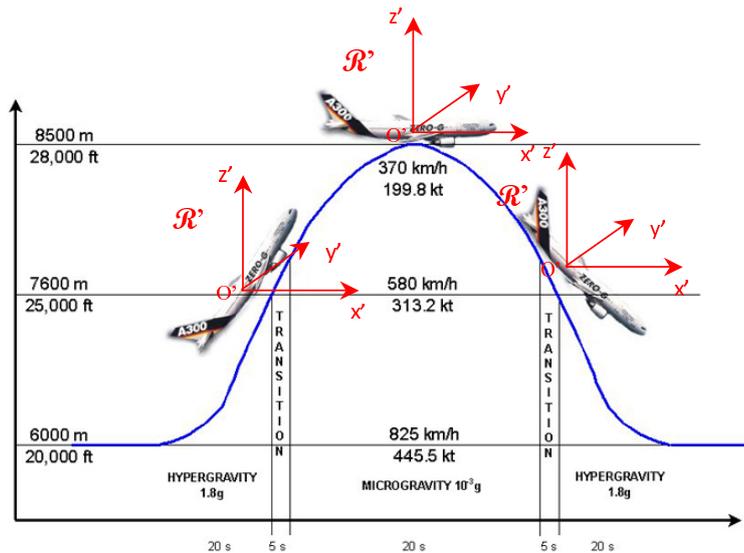


FIGURE I.15 – Vol parabolique de l’AIRBUS "0g" - condition de microgravité

donc

$$m \vec{a}(M)_{/\mathcal{R}'} = m \left[ \vec{\mathcal{G}}(M) - \vec{\mathcal{G}}(O') \right] \simeq \vec{0}$$

en supposant le champ gravitationnel identique en  $O'$  et en  $M$ .

CONCLUSION :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{cste} \quad \Leftrightarrow \quad \text{le vaisseau est pseudo-galiléen, ou inertiel}$$

## IV.2 Cas de la rotation

### Voiture sur un rond point : la force "centrifuge"

Supposons un point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour de l'axe  $[Oz] = [O'z']$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  galiléen. Par exemple, la masse d'un pendule suspendue au plafond d'une voiture prenant un rond point de rayon  $R$ . Le référentiel  $\mathcal{R}'$  est rigidement lié à la voiture et  $\mathcal{R}$  lié à la Terre et supposé galiléen.

Le véhicule parcourt le rond point à la vitesse angulaire **constante**  $\omega = \dot{\varphi} = cste$ .

HYPOTHÈSE : on suppose que le pendule n'oscille pas dans le référentiel du véhicule :

$$\Rightarrow \quad \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

- QUESTIONS :
- Expression de la pseudo-force  $F_{ie}$  ?
  - Quel est l'angle d'inclinaison  $\alpha_e$  du pendule par rapport à la verticale dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  ?

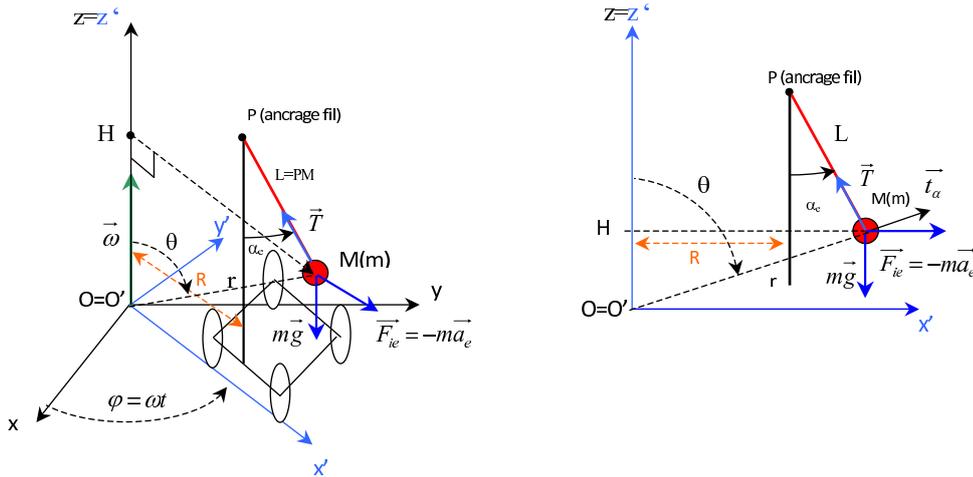


FIGURE I.16 – Action de la pseudo-force d'inertie d'entraînement lors de la prise d'un rond point

Appliquons la RFD au point  $M(m)$  dans  $\mathcal{R}'$  :

$$m \vec{a}(M)|_{\mathcal{R}'} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} = \vec{P} + \vec{T} - m\vec{a}_e = \vec{0}$$

Dans le choix du schéma ci-dessous, on a :  $\begin{cases} O' \equiv O \implies \vec{a}(O')|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \\ \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \omega \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k} = \overrightarrow{Cste} \end{cases}$

Ainsi l'accélération d'entraînement se réduit à :

$$\vec{a}_e = \vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge [\vec{\omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'M}] = -\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

et la pseudo-force d'inertie d'entraînement en  $M$  qui s'écrit donc :

$$\vec{F}_{ie}(M) = +m\omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Finalement la RFD devient :  $-mg \vec{k} + \vec{T} + m\omega^2 \overrightarrow{HM} = \vec{0}$

Projetons ce dernier résultat sur la direction tangente à  $t_\alpha$  :

$$-mg \sin \alpha_e + mHM\omega^2 \cos \alpha_e = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mg \sin \alpha_e + mHM\omega^2 \cos \alpha_e = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -mg \sin \alpha_e + m(R + L \sin \alpha_e)\omega^2 \cos \alpha_e = 0$$

d'où l'on tire l'équation trigonométrique suivante :

$$\boxed{g \tan \alpha_e - L\omega^2 \sin \alpha_e = R\omega^2}$$

**NB** : la résolution peut se faire numériquement ou graphiquement (à faire) à partir de valeurs numériques des paramètres.